

Automates finis non déterministes

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 3.10 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ reconnaître un automate fini non déterministe (AFND)
- ☞ déterminer un AFND
- ☞ expliquer comment éliminer les transitions spontanées

A Déterminisme?

Soient les automates décrits sur les figures 1, 2 et 3 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

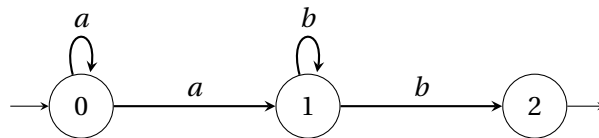


FIGURE 1 - \mathcal{A}_1

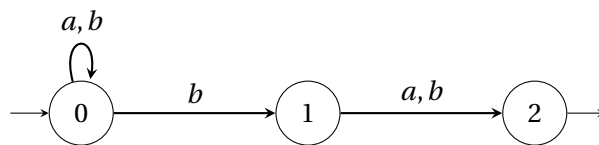


FIGURE 2 - \mathcal{A}_2

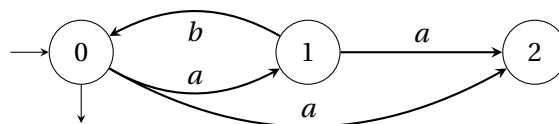


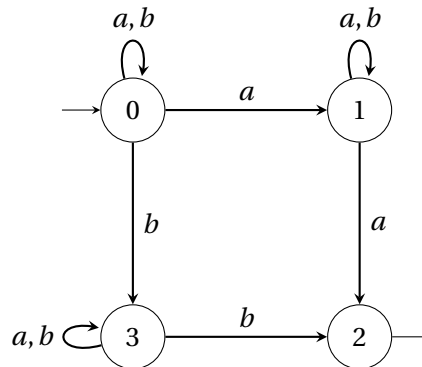
FIGURE 3 - \mathcal{A}_3

- Les automates \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 sont-ils déterministes? Pourquoi?
- L'automate \mathcal{A}_1 reconnaît-il le mot aabbb? Construire l'arbre de l'exécution de cet automate pour ce mot.

- A3. Même question pour le mot bbbaa et l'automate \mathcal{A}_2 .
 A4. Même question pour le mot abab et l'automate \mathcal{A}_3 .
 A5. Décrire dans le langage naturel les langages reconnus par les automates \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 .

B Déterminisation d'un AFND

Soit l'automate \mathcal{A} suivant :



- B1. Pourquoi l'automate suivant est-il non déterministe?
 B2. Quel est le langage reconnu par cet automate?
 B3. Déterminiser l'automate fini non déterministe \mathcal{A} suivant. On procédera en construisant le tableau des états de l'automate déterministe associé.
 B4. Dessiner l'automate déterministe calculé précédemment.

C Modélisation d'un automate non déterministe en OCaml

On choisit de modéliser un automate fini non déterministe par un type algébrique de la manière suivante : les états sont représentés par des types `int`. Les lettres sont des types `char`. On représente les états par une `int list` et l'alphabet par une `char list`. On spécifie les états initiaux et accepteurs par une `int list`. Les transitions possibles forment une `(int * char * int) list`. Cette solution d'implémentation présente l'avantage de coller au plus prêt à la définition mathématique d'un automate.

```

type ndfsm = { states : int list;
              alphabet : char list;
              initial : int list;
              transitions : (int * char * int) list;
              accepting : int list};;
  
```

- C1. Créer une variable `automata` qui représente l'automate non déterministes \mathcal{A} de la section B.

D Codage de l'algorithme de déterminisation

On souhaite implémenter l'algorithme de déterminisation d'un automate fini non déterministe. Pour cela, on choisit de représenter un élément de $\mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q , par une `int list`, c'est-à-dire une liste d'états. Si le nombre d'états de l'automate non déterministe est n , alors le cardinal de

$\mathcal{P}(Q)$ est 2^n . C'est pourquoi on choisit de coder chaque état par un nombre entre 0 et $2^n - 1$. Ce nombre est construit d'une manière univoque comme suit : chaque état de l'automate de départ est codé de 0 à $n - 1$; chaque état associé à un élément de $\mathcal{P}(Q)$ est obtenu en effectuant la somme des puissances de 2 associées à un état. Par exemple, pour la partition $[0; 2; 3]$ on aura $2^0 + 2^2 + 2^3 = 11 = 1011_2$: l'état correspondant de l'automate déterministe sera donc le numéro 11.

- D1. Écrire une fonction de signature `get_partition_number_from_list : int list -> int` qui renvoie le numéro associé à un élément de $\mathcal{P}(Q)$, c'est-à-dire l'état de l'automate déterministe associé à un ensemble d'états de l'automate non déterministe. On utilisera la fonction `lsl` qui permet de calculer rapidement une puissance de 2. Par exemple, `1 lsl 3` calcule 2^3 .
- D2. Écrire une fonction de signature `successors : ndfsm -> int -> char -> int list` qui renvoie les états suivants possibles. L'automate est dans un certain état (`int`) et il reçoit une lettre (`char`), le tout est passé en paramètres.
- D3. Écrire une fonction de signature `successor_part : ndfsm -> int list -> char -> int list * int` qui renvoie l'état suivant de l'automate déterministe ainsi que le numéro associé à cet état. Les paramètres sont l'automate, l'état courant (`int list`) et la lettre reçue. Par exemple, l'appel `successor_part automata [0;1] 'a'`; renvoie `- : int list * int = ([0; 1; 2], 7)` sur l'automate considéré précédemment. On pourra s'appuyer sur les fonctions auxiliaires suivantes :

- `uniq_insert : 'a -> 'a list -> 'a list` qui insère un élément dans une liste s'il n'y est pas,
- `merge : 'a list -> 'a list -> 'a list` qui fusionne deux listes,

- D4. Écrire une fonction de signature `build_det_fsm : ndfsm -> ndfsm` qui renvoie l'automate déterministe associé à un automate non déterministe. Il s'agit de construire :
1. les états de l'automate déterministe associé,
 2. les transitions de cet automate,
 3. d'en déduire l'état initial et les états accepteurs.

Pour la procédure, on utilisera une file d'attente (bibliothèque `Queue`) : cette file est initialisée avec l'état initiale de l'automate déterministe. À chaque itération, on défile (`pop`) un élément et on enfile (`push`) les nouveaux états découverts. La procédure s'arrête lorsque la file est vide. On a alors trouvé tous les états de l'automate et toutes les transitions de l'automate déterministe.

Pour mémoriser les partitions déjà rencontrées, on utilisera une table de hachage de la bibliothèque `Hashtbl`. Les clefs de cette table seront les numéros associés aux états de l'automate déterministe et la valeur associée à une clef sera la liste des états de l'automate non déterministe associée à cette partie de Q .

Pour savoir si un état est un état accepteur, on pourra utiliser la fonction `land` qui calcule le ET bit à bit entre deux nombres entiers.

Pour l'automate non déterministe considéré à la section précédente, on obtient :

```
{ states = [15; 13; 11; 7; 9; 3; 1];
  alphabet = ['a'; 'b'];
  initial = [1];
  transitions = [(15, 'b', 15); (15, 'a', 15);
                (13, 'b', 13); (13, 'a', 11);
                (11, 'b', 15); (11, 'a', 15);
                (7, 'b', 11); (7, 'a', 7);
```

```
(9, 'b', 13); (9, 'a', 11);  
(3, 'b', 11); (3, 'a', 7);  
(1, 'b', 9); (1, 'a', 3)];  
accepting = [15; 13; 7]}
```

- D5. Écrire une fonction qui permet de savoir si un mot est reconnu par l'automate déterministe ainsi généré.
- D6. Proposer un algorithme permettant de savoir si un automate est déterministe.